Análisis Matemático I

1. Prueba que:

   a) (1 punto) Todo conjunto compacto de un espacio métrico es completo.

   b) (1/2 punto) Todo conjunto completo de un espacio métrico es cerrado.

   c) (1/2 punto) Todo conjunto cerrado de un espacio métrico completo es completo.

   d) (1 punto) La imagen de una sucesión de Cauchy por una función uniformemente continua es una sucesión de Cauchy.

2. (1,5 puntos) Sea K un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Sea $r > 0$ un número fijo y definamos $A = \bigcup_{x \in K} \overline{B}(x,r)$ donde $\overline{B}(x,r)$ indica la bola cerrada de centro x y radio r para una norma que se supone fijada en $\mathbb{R}^n$. Prueba que A es compacto.

3. (1 punto) Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ campos escalares definidos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{a} \in \Omega$ y supongamos que f es diferenciable en $\mathbf{a}$, $f(\mathbf{a}) = 0$ y g es continua en $\mathbf{a}$. Prueba que fg es diferenciable en $\mathbf{a}$.

4. (1,5 puntos) Calcula y clasifica los puntos críticos de la función $z = z(x,y)$ definida implícitamente por la igualdad $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.

5. (1,5 puntos) Justifica la existencia de abiertos difeomorfos A y B de $\mathbb{R}^2$ verificando que $(1,1) \in A$, $(0,1) \in B$ y que para cada $(x,y) \in A$ existe un único $(u,v) \in B$ tal que:
$$\begin{aligned} x\,\mathrm{e}^u + y\,\mathrm{e}^v &= 1 + \mathrm{e} \\ u\,\mathrm{e}^x + v\,\mathrm{e}^y &= \mathrm{e} \end{aligned}$$

   Calcula la matriz jacobiana en $(1,1)$ de la aplicación $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$.

   Calcula la matriz jacobiana en $(0,1)$ de la aplicación $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$.

6. (1 punto) Calcula un punto $P = (u,v,w)$ de coordenadas positivas perteneciente al elipsoide de ecuación
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
   tal que el plano tangente al elipsoide en P determine con los ejes coordenados un tetraedro de volumen mínimo.

7. (1 punto)

   a) Regla de la cadena (versión general).

   b) Espacios tangente y normal en un punto de una variedad diferenciable.

Granada, 10 de febrero de 2016